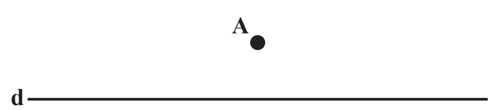
ناصر وجدی، حمیدرضا ملکی، حسین کریمی

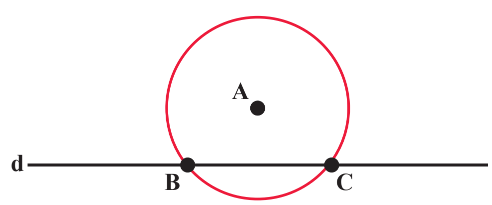
برای رسم خط موازی با یک خط رسم حداقل چند دایره لازم است؟

می‌دانیم که در هندسهٔ اقلیدسی، از نقطهٔ A خارج خط d، یک و تنها یک خط به موازات خط d می‌توان رسم کرد. برای رسم چنین خطی، در کتاب‌های درسی با استفاده از ابزار اقلیدسی (پرگار و خط‌کش غیرمدرج) روش‌های متفاوتی بیان می‌شوند؛ از جمله:

روش اول

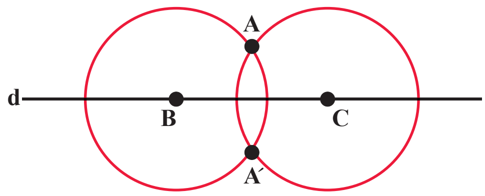


گام اول: دایره‌ای به مرکز A رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های B و C قطع کند (شکل ۱)



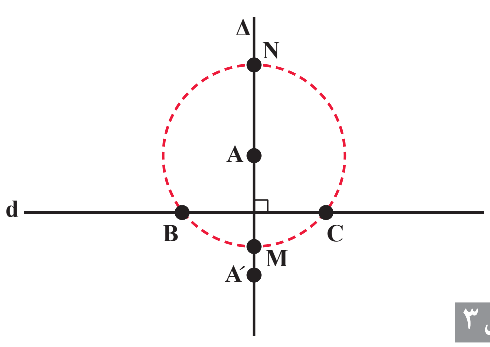
شکل ۱

گام دوم: دایره‌هایی به همان شعاع به مراکز B و C رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در A و 'A قطع کنند (شکل ۲).



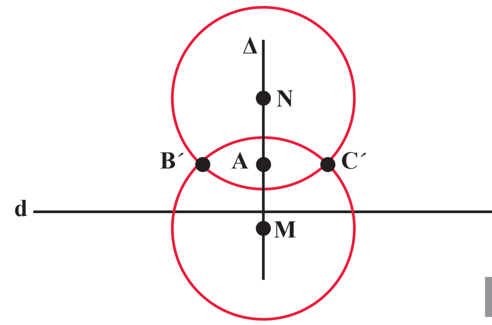
شکل ۲

گام سوم: نقطه‌های A و 'A را به هم وصل می‌کنیم تا خط Δ عمود بر d حاصل شود و نقطه‌های تلاقی Δ با دایرهٔ اول را M و N می‌نامیم (شکل ۳).



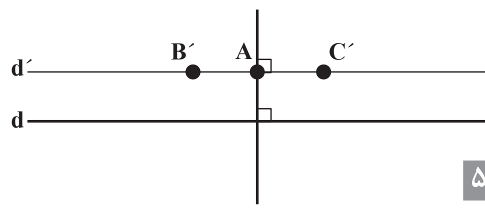
شکل ۳

گام چهارم: دو دایره به مرکزهای M و N و به شعاع بزرگ‌تر از MA=NA رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌های 'B و 'C قطع کنند (شکل ۴).



شکل ۴

گام پنجم: نقطه‌های 'B و 'C را به هم وصل می‌کنیم تا خط 'd عمود بر Δ حاصل شود (شکل ۵). خط 'd جواب مسئله است (زیرا $d' \perp \Delta$ و $d \perp \Delta$ و در نتیجه: d||d').

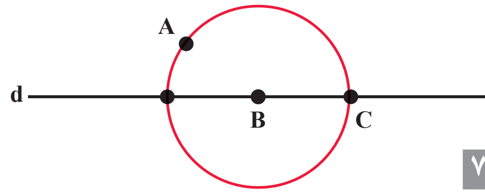


شکل ۵

روش دوم

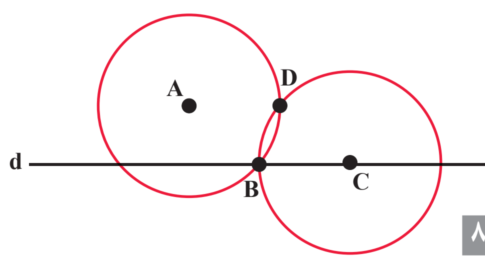
شکل ۶

گام اول: نقطهٔ دلخواه B را روی خط d در نظر می‌گیریم و دایره‌ای به مرکز B و به شعاع BA رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند (شکل ۷).



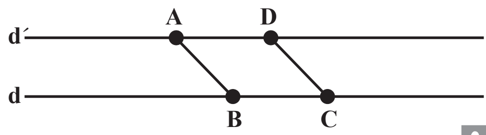
شکل ۷

گام دوم: دو دایره به همان شعاع به مرکزهای A و C رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند (شکل ۸).



شکل ۸

گام سوم: چهارضلعی ABCD (به دلیل اینکه AB=BC=CD=DA=R)، یک لوزی است (شکل ۹). پس: AD||BC در نتیجه 'd (امتداد AD) جواب مسئله است.



شکل ۹

در روش اول، برای رسم خط گذرا از A که موازی با خط d باشد، از رسم پنج دایره، و در روش دوم، از رسم سه دایره استفاده کردیم.

اکنون این سؤال مطرح می‌شود:

اگر A نقطه‌ای خارج خط d باشد، برای رسم خط گذرا از A و موازی با d، به رسم حداقل چند دایره نیاز است؟

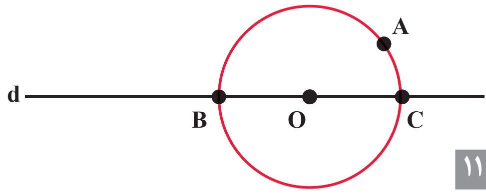
دو روش بسیار جالب و زیبا ارائه می‌دهیم که در یکی از آن‌ها رسم یک دایره و در دیگری رسم نیم‌دایره هم کافی است!

شما می‌توانید در همین جا مکث کنید، بقیهٔ مطلب را نخوانید، و خودتان به دنبال دلیل علمی و هندسی آن باشید.

با رسم یک دایره

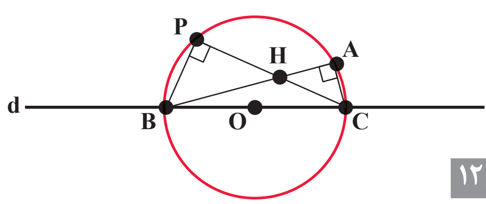
شکل ۱۰

گام اول: نقطهٔ دلخواه O را روی خط d در نظر می‌گیریم و دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های B و C قطع کند (شکل ۱۱).



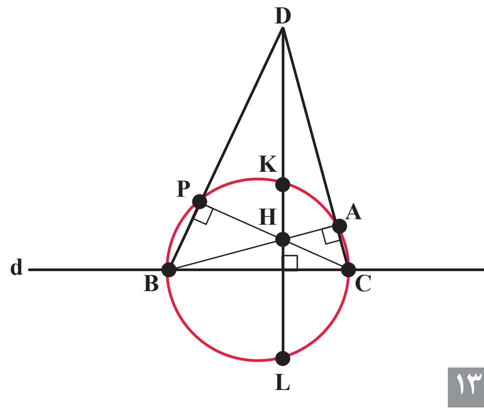
شکل ۱۱

گام دوم: نقطهٔ دلخواه P را روی دایره در نظر می‌گیریم و از A و P به نقطه‌های B و C خطی رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی AB و CP را H می‌نامیم (شکل ۱۲).



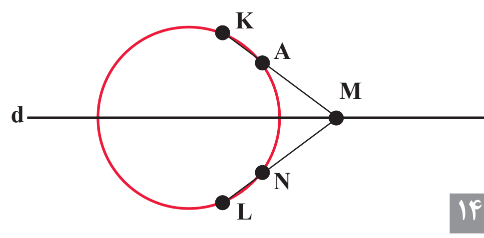
شکل ۱۲

گام سوم: در مثلث BCD (شکل ۱۳)، H نقطهٔ هم‌رسی ارتفاع‌هاست و K و L نقطه‌های تلاقی ارتفاع سوم با دایره هستند. (نقطه‌های K و L قرینهٔ یکدیگرند نسبت به خط d، چون DKHL عمود بر خط d است).



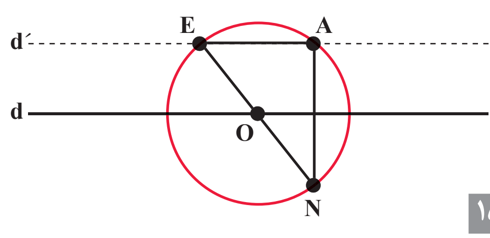
شکل ۱۳

گام چهارم: از نقطهٔ M محل تلاقی امتداد KA با خط d (شکل ۱۴)، به L وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ N قطع کند. (A و N نیز قرینهٔ یکدیگرند، نسبت به خط d).



شکل ۱۴

گام پنجم: امتداد NO دایره را در E قطع می‌کند که امتداد AE همان خط d' به موازات d است (در مثلث ANE (در شکل ۱۵)، خط d از وسط دو ضلع NE و AN می‌گذرد).

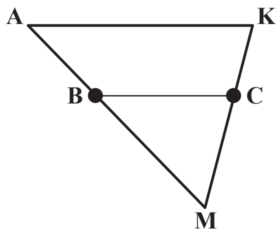


شکل ۱۵

با رسم نیم‌دایره

ابتدا یادآوری سه مطلب الزامی است:

الف. اگر در مثلث AMK (شکل ۱۶) داشته باشیم: $\frac{KC}{KM}=\frac{AB}{AM}$ ، آن‌گاه: AK||BC و برعکس.

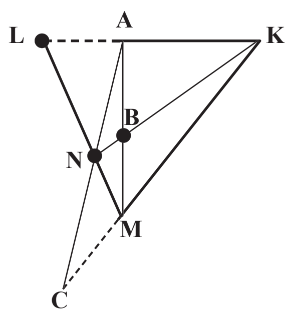


شکل ۱۶

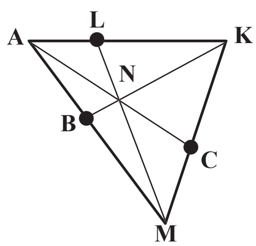
ب. قضیهٔ سوا:

اگر در مثلث AMK سه خط رسم شده از رأس‌ها در یک نقطه مانند N به هم رسیده باشند (مانند دو شکل ۱۷ و ۱۸).

داریم: $\frac{KL}{LA}\times\frac{AB}{BM}\times\frac{MC}{CK}=1$



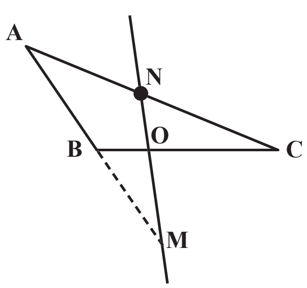
شکل ۱۷



شکل ۱۸

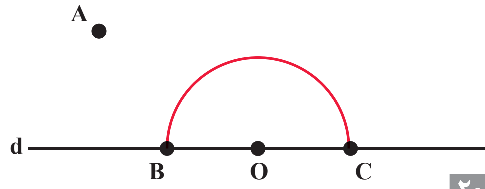
ج. قضیهٔ منلائوس:

اگر در مثلث ABC، نقطهٔ N واقع بر AC و نقطهٔ O واقع بر BC و نقطهٔ M واقع بر امتداد AB، روی یک خط واقع باشند (شکل ۱۹)، آن‌گاه: $\frac{AM}{MB}\times\frac{CN}{NA}\times\frac{BO}{OC}=1$ و برعکس.



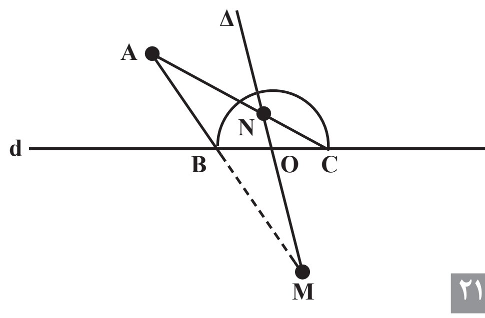
شکل ۱۹

گام اول: نقطهٔ دلخواه O را روی خط d در نظر می‌گیریم و نیم‌دایرهٔ دلخواهی به مرکز O رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های B و C قطع کند (شکل ۲۰).



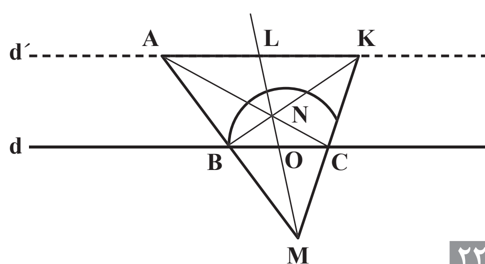
شکل ۲۰

گام دوم: خط دلخواه Δ گذرا از O را رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در M و AC را در N قطع کند (شکل ۲۱).



شکل ۲۱

گام ســـوم: نقطهٔ تلاقی امتدادهای BN و MC را K می‌نامیم (شکل ۲۲).



شکل ۲۲

خط d' (امتداد AK) جواب مسئله است.

زیرا:

$$\Delta ACK \xrightarrow{\text{منلائوس}} \frac{KL}{LA}\times\frac{AN}{NC}\times\frac{CM}{MK}=\text{۱} \qquad (\text{۱})$$

$$\Delta AMK \xrightarrow{\text{سوا}} \frac{KL}{LA}\times\frac{AB}{BM}\times\frac{MC}{CK}=\text{۱} \qquad (\text{۲})$$

$$(\text{۱}),(\text{۲}) \Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{AB\times MK}{BM\times CK} \qquad (\text{۳})$$

$$\Delta ABC \xrightarrow{\text{منلائوس}} \frac{AN}{NC}\times\frac{CO}{OB}\times\frac{MB}{MA}=\text{۱}$$

$$\xrightarrow{CO=OB} \frac{AN}{NC}=\frac{MA}{MB} \qquad (\text{۴})$$

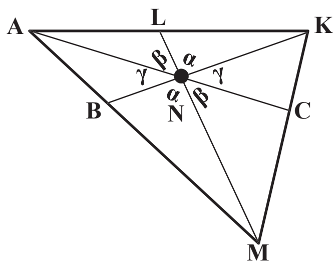
$$(\text{۳}),(\text{۴}) \Rightarrow \frac{AB\times MK}{BM\times CK}=\frac{MA}{MB} \Rightarrow \frac{AB}{AM}=\frac{KC}{KM}$$

$$\Rightarrow AK \parallel BC \Rightarrow d' \parallel d$$

اثبات قضیهٔ سوا

$$\frac{KL}{LA}=\frac{S_{NKL}}{S_{NAL}}=\frac{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}NK.NL.\sin\alpha}{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}NA.NL.\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{KL}{LA}=\frac{NK.\sin\alpha}{NA.\sin\beta}$$



شکل ۲۳

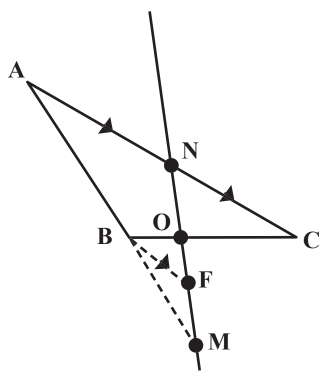
و به همین ترتیب:

$$\frac{MC}{CK}=\frac{NM.\sin\beta}{NK.\sin\gamma}\ ,\ \frac{AB}{BM}=\frac{NA.\sin\gamma}{NM.\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{KL}{LA}\times\frac{AB}{BM}\times\frac{MC}{CK}=\text{۱}$$

اثبات قضیهٔ منلائوس

از رأس B به موازات AC رســم می‌کنیم تا خط قاطع NOM را در F قطع کند (شکل ۲۴).



شکل ۲۴

$$\Delta OBF \approx \Delta ONC \Rightarrow \frac{CN}{BF}=\frac{CO}{OB} \qquad (\text{۱})$$

$$\Delta FBM \approx \Delta NAM \Rightarrow \frac{NA}{BF}=\frac{MA}{MB} \qquad (\text{۲})$$

از تقسیم (۱) بر (۲) داریم:

$$\frac{CN}{NA}=\frac{CO}{OB}\times\frac{MB}{MA} \Rightarrow \frac{OB}{OC}\times\frac{CN}{NA}\times\frac{MA}{MB}=\text{۱}$$